



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, 10 februarie 2024**

**CLASA a VI-a**

**Problema 1.** Definim următoarele reguli de calcul cu numere naturale:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ , unde  $n$  este orice număr natural nenul.

$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)$ , unde  $n$  este orice număr natural.

De exemplu:  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$  și  $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ .

a) Arătați că numărul  $A = 4! - 2! + 8! - 6!$ , este divizibil cu 11.

b) Arătați că numărul  $B = 5!! - 3!! + 9!! - 7!! + 13!! - 11!! + \dots + 2025!! - 2023!!$ , este multiplul lui 4.

**Problema 2.** Determinați numerele naturale  $x, y, z, t$ , știind că sunt adevărate relațiile

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3000 \text{ și } \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}.$$

**Problema 3.** Considerăm numerele naturale nenule  $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$  astfel încât

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 + 2024a_2} = \frac{a_2 + a_3}{a_2 + 2024a_3} = \frac{a_3 + a_4}{a_3 + 2024a_4} = \dots = \frac{a_{2023} + a_{2024}}{a_{2023} + 2024a_{2024}} = \frac{a_{2024} + a_1}{a_{2024} + 2024a_1}.$$

Arătați că  $a_1 = a_2 = \dots = a_{2024}$ .

**Problema 4.** Unghiurile adiacente  $AOB$  și  $BOC$  au suma măsurilor lor egală cu  $a^\circ$ , unde  $a$  este un număr cuprins între 0 și 180.

a) Dacă știm că măsurile celor două unghiuri sunt exprimate prin numere naturale, că raportul

măsurilor lor este  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $a = 120$ , aflați câte valori poate lua numărul natural  $n$ .

b) Considerăm că  $a = 180$  și unghiul  $AOB$  are măsura mai mică de  $45^\circ$ . Construim de aceeași parte cu  $OB$  față de dreapta  $OA$ , semidreapta  $OD$  perpendiculară pe  $OA$  și semidreapta  $OE$  perpendiculară pe  $OB$ , astfel încât măsura unghiului  $COE$  este dublul măsurii unghiului  $AOB$ . Dacă  $OM$  este bisectoarea unghiului  $BOD$  și  $ON$  este bisectoarea unghiului  $DOE$ , arătați că este adevărată următoarea relație între măsurile unghiurilor

$$\frac{\angle AOB}{2} = \frac{\angle MON}{3} = \frac{\angle BOD}{4} = \frac{\angle NOC}{5}.$$

*Timp de lucru 2 ore.*



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI

*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etape Locală, 10 februarie 2024**

**CLASA a VI-a - soluții și bareme**

**Problema 1.** Definim următoarele reguli de calcul cu numere naturale:

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ , unde  $n$  este orice număr natural nenul.

$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)$ , unde  $n$  este orice număr natural.

De exemplu:  $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$  și  $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 = 15$ .

a) Arătați că numărul  $A = 4! - 2! + 8! - 6!$ , este divizibil cu 11.

b) Arătați că numărul  $B = 5!! - 3!! + 9!! - 7!! + 13!! - 11!! + \dots + 2025!! - 2023!!$ , este multiplul lui 4.

*Soluție.*

a)  $A = 2! \cdot 3 \cdot 4 - 2! + 6! \cdot 7 \cdot 8 - 6! = 2! \cdot (12 - 1) + 6! \cdot (56 - 1) = 2! \cdot 11 + 6! \cdot 55 \dots\dots\dots 2p$

$A = 11 \cdot (2! + 6! \cdot 5) \Rightarrow N : 11 \dots\dots\dots 1p$

Pentru calcul direct și verificare prin împărțire, se acordă 3p.

b)  $5!! - 3!! = 3!!(5 - 1) = 3!! \cdot 4 \in M_4$ ,  $9!! - 7!! = 7!!(9 - 1) = 7!! \cdot 8 = 7!! \cdot 2 \cdot 4 \in M_4$ ,

$\dots\dots\dots$

$2025!! - 2023!! = 2023!!(2025 - 1) = 2023!! \cdot 2024 = 2023!! \cdot 506 \cdot 4 \in M_4 \dots\dots\dots 2p$

Orice scădere din numărul  $B$ , are forma  $(4n+5)!! - (4n+3)!!$  și se scrie

$(4n+5)!! - (4n+3)!! = (4n+3)!!(4n+5-1) = (4n+3)!!(4n+4) = (4n+3)!! \cdot 4(n+1) \in M_4$

Numărul  $B$  este o sumă de multipli ai lui 4  $\Rightarrow B \in M_4 \dots\dots\dots 1p$

**Problema 2.** Determinați numerele naturale  $x, y, z, t$ , știind că sunt adevărate relațiile

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3000 \text{ și } \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}.$$

*Gazeta Matematică*

*Soluție.*  $\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}$  se rescrie  $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{t}{8} = k$ ,

unde  $k$  este un număr rațional pozitiv  $\dots\dots\dots 3p$

$x = 2k, y = 4k, z = 6k, t = 8k$  și  $4k^2 + 16k^2 + 36k^2 + 64k^2 = 3000 \dots\dots\dots 2p$



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI

$k^2 = 25$ ,  $k = 5$  și  $x = 10$ ,  $y = 20$ ,  $z = 30$ ,  $t = 40$  .....2p

**Problema 3.** Considerăm numerele naturale nenule  $a_1, a_2, \dots, a_{2024}$  astfel încât

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 + 2024a_2} = \frac{a_2 + a_3}{a_2 + 2024a_3} = \frac{a_3 + a_4}{a_3 + 2024a_4} = \dots = \frac{a_{2023} + a_{2024}}{a_{2023} + 2024a_{2024}} = \frac{a_{2024} + a_1}{a_{2024} + 2024a_1}.$$

Arătați că  $a_1 = a_2 = \dots = a_{2024}$ .

*Soluție.*

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{a_1 + 2024a_2} &= \frac{a_2 + a_3}{a_2 + 2024a_3} = \frac{a_3 + a_4}{a_3 + 2024a_4} = \dots = \frac{a_{2023} + a_{2024}}{a_{2023} + 2024a_{2024}} = \frac{a_{2024} + a_1}{a_{2024} + 2024a_1} = \\ &= \frac{2(a_1 + a_2 + \dots + a_{2024})}{2025(a_1 + a_2 + \dots + a_{2024})} = \frac{2}{2025} \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{a_1 + 2024a_2} &= \frac{2}{2025} \Rightarrow a_1 = a_2, \quad \frac{a_2 + a_3}{a_2 + 2024a_3} = \frac{2}{2025} \Rightarrow a_2 = a_3, \dots, \\ \frac{a_{2024} + a_1}{a_{2024} + 2024a_1} &= \frac{2}{2025} \Rightarrow a_{2024} = a_1 \dots\dots\dots 3p \end{aligned}$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2024} \dots\dots\dots 1p$$

**Problema 4.** Unghiurile adiacente  $AOB$  și  $BOC$  au suma măsurilor lor egală cu  $a^\circ$ , unde  $a$  este un număr cuprins între 0 și 180.

- a) Dacă știm că măsurile celor două unghiuri sunt exprimate prin numere naturale, că raportul măsurilor lor este  $\frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $a = 120$ , aflați câte valori poate lua numărul natural  $n$ .
- b) Considerăm că  $a = 180$  și unghiul  $AOB$  are măsura mai mică de  $45^\circ$ . Construim de aceeași parte cu  $OB$  față de dreapta  $OA$ , semidreapta  $OD$  perpendiculară pe  $OA$  și semidreapta  $OE$  perpendiculară pe  $OB$ , astfel încât măsura unghiului  $COE$  este dublul măsurii unghiului  $AOB$ . Dacă  $OM$  este bisectoarea unghiului  $BOD$  și  $ON$  este bisectoarea unghiului  $DOE$ , arătați că este adevărată următoarea relație între măsurile unghiurilor

$$\frac{\angle AOB}{2} = \frac{\angle MON}{3} = \frac{\angle BOD}{4} = \frac{\angle NOC}{5}.$$

*Soluție.* a) Notez măsura unghiului  $AOB$  cu  $x^\circ$  și măsura unghiului  $BOC$  cu  $y^\circ$ , unde  $x$  și  $y$  sunt numere naturale, atunci  $x + y = 120$  și  $\frac{x}{y} = \frac{1}{n} \Rightarrow y = xn$  și  $x + xn = 120 \Rightarrow x(1 + n) = 120 \dots\dots\dots 1p$

$1 + n \in D_{120}$ ,  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$  și are 16 divizori, dar pentru  $n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \dots\dots\dots 1p$

Rămân 15 valori pe care le poate lua  $n + 1$  și implicit, numărul natural  $n \dots\dots\dots 1p$



INSPECTORATUL ȘCOLAR

JUDEȚEAN IALOMIȚA



SSMR



MINISTERUL  
EDUCAȚIEI

b)

$OB \perp OE \Rightarrow \angle BOE = 90^\circ$ ,  $\angle AOC = 180^\circ$  și

$\angle COE = 2(\angle AOB)$ , atunci

$3(\angle AOB) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  și

$\angle AOB = 30^\circ$  .....1p

$OD \perp OA \Rightarrow \angle AOD = 90^\circ \Rightarrow \angle BOD = 60^\circ$

$OM$  bisectoarea  $\angle BOD \Rightarrow \angle BOM = \angle MOD = 30^\circ$

$\angle DOE = \angle BOE - \angle BOD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$ON$  bisectoarea  $\angle DOE \Rightarrow \angle DON = \angle NOE = 15^\circ$  .....1p

$\angle MON = \angle MOD + \angle DON = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

$\angle NOC = \angle NOE + \angle EOC = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$  .....1p

$\frac{\angle AOB}{2} = \frac{\angle MON}{3} = \frac{\angle BOD}{4} = \frac{\angle NOC}{5} \Leftrightarrow \frac{30^\circ}{2} = \frac{45^\circ}{3} = \frac{60^\circ}{4} = \frac{75^\circ}{5} = 15^\circ$  .....1p

